

# 博士学位論文内容要旨および審査結果の要旨

(「博士」号請求論文審査報告書)

いわき明星大学 大学院

理工学研究科委員会

「博士」号請求論文審査報告書

1. 論文題目 分数階微分を用いた非線形粘弾性有限要素解析
2. 提出者 那須野 洋
3. 提出日 2008 年 3 月 13 日
4. 学位審査日 2009 年 1 月 21 日
5. 口頭審査日 2009 年 1 月 21 日
6. 審査委員会 主査 いわき明星大学教授 清水 信行  
副査 いわき明星大学教授 桜井 俊明  
副査 いわき明星大学教授 東 之弘  
副査 いわき明星大学教授 安野 拓也  
副査 秋田大学教授 砂子田 勝昭
7. 学位の種類 博士（理工学）
8. 学位授与の要件 いわき明星大学学位規定 第 4 条 2 項
9. 最終試験結果 審査委員会は、論文の提出者は、大学院博士課程の  
学力を有するものと確認した。
10. 理工学研究科の決議日 2009 年 1 月 28 日
11. 論文審査の結果の要旨

本論文は、予圧縮変形下における粘弾性体の変位 - 力関係を実験的、理論的に解明することを目的としている。粘弾性体の圧縮変形方向に対する変位 - 力関係はこれまであまり注目されておらず、実験的、理論的な解明が進んでいない。また、材料の内部減衰の発生メカニズムは明らかになっていないため、粘弾性体のように比較的大きな材料減衰を生じる物質の変形挙動を定式化する、あるいは数値的な予測を基に制御することは現在もなお難しい問題として残されている。近年では、粘弾性材料あるいは粘弾性要素を含む系の挙動を精度良く解析するための新たな手法が必要とされている。

そのような背景のもと、本論文では、図 1 に示す円柱形粘弾性体の予圧縮変形下における準静的、動的な変位 - 力挙動を実際に測定し、圧縮変形量の大きさに応じた幾何学的非線形性が粘弾性変位 - 力関係に生じることを明らかにした。このような粘弾性変位 - 力関係はこれまであまり注目されておらず、測定されてこなかった。論文では、測定した非線形粘弾性変位 - 力関係は、非線形分数階微分変位 - 力モデルによって表せることを述べている。つぎに、実験で測定した非線形粘弾性変位 - 力挙動の解析手法を開発するために、今回使用した粘弾性材料から分数階微分構成式を導出し、この構成式を幾何学的非線形有限要素定式化に応用した。その結果、分数階微分非線形粘弾性有限要素方程式が定式化され、この方程式に含まれる接線剛性行列や等価節点力ベクトルは、節

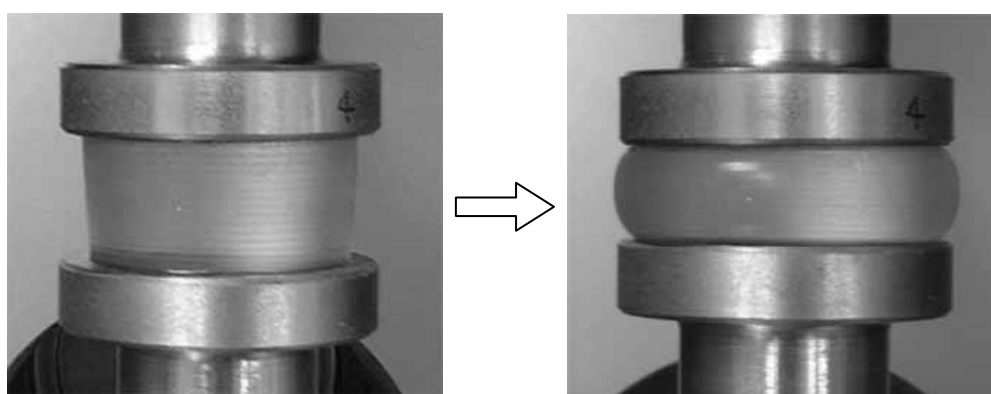


図 1 円柱形粘弾性体に圧縮変位を与えた場合の変形形状

点変位ベクトルに対して線形、非線形の粘弾性効果を生じることが分かった。本研究ではこれらの行列やベクトルを「一般化接線剛性行列」および「等価節点粘弾性力ベクトル」と呼んでいる。

材料や構造物の非線形粘弾性効果を表す行列やベクトルは今のところ提案されていないようであり、これらを定式化できたことは本論文における重要な成果である。このような行列やベクトルを含む有限要素方程式は、その形から粘弾性を生じるメカニズムが明らかであり、粘弾性防振器具の有限変形領域における粘弾性解析に大いに役立つと考えられる。

定式化した分数階微分非線形有限要素方程式を用いて解析結果と実験結果とを比較した。予圧縮変位（目標値：2.7mm，4.5mm）を与えた場合の実験で測定した線形、非線形の粘弾性力を図 2 の上段に示し、この図の力を入力値とした非線形有限要素解析結果を図 2 の下段に示す。図 2 の破線は実験データ、実線は解析変位時刻歴応答を表す。

図 2 の下段より、提案手法は準静的粘弾性挙動をうまく解析できていることが分かる。つぎに、加振振幅 1mm、加振周波数 0.1Hz、10Hz、を入力した場合の動的な粘弾性変位 - 力挙動を解析した結果を図 3、4 に示す。色が薄い実線（青色）は実験データを表しており、色が濃い実線（赤色）は解析変位時刻歴応答または解析変位 - 力関係を表す。図 3、4 より、提案手法は 0.1Hz、10Hz 加振に対する実験データと共によく一致していることが分かる。図 4 の 10Hz 加振に対する解析結果は、実験データの振幅 1mm に対して最大で 0.3mm（30%）程度の差が生じていることが分かる。ただし、準静的な粘弾性挙動と 10Hz 加振に対する動的粘弾性挙動とをひずみ速度で比較した場合、その差は約  $10^4$  rad/s の広い範囲に亘っている。したがって、約 30% 程度の解析誤差を許すならば、提案手法は実用的な精度で実験結果を解析したといえる。

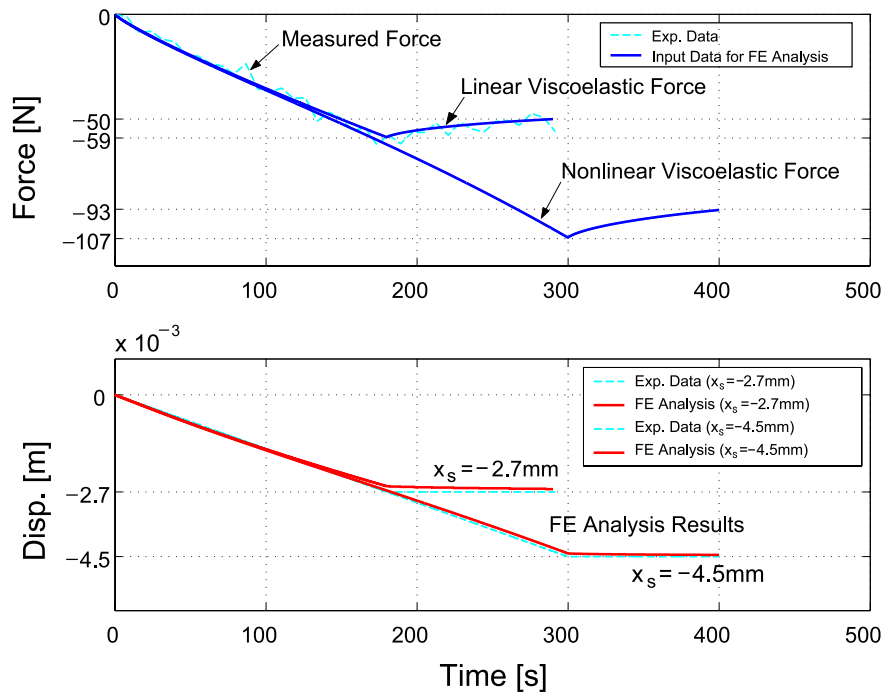


図2 予圧縮変形下における準静的粘弾性挙動の有限要素解析結果

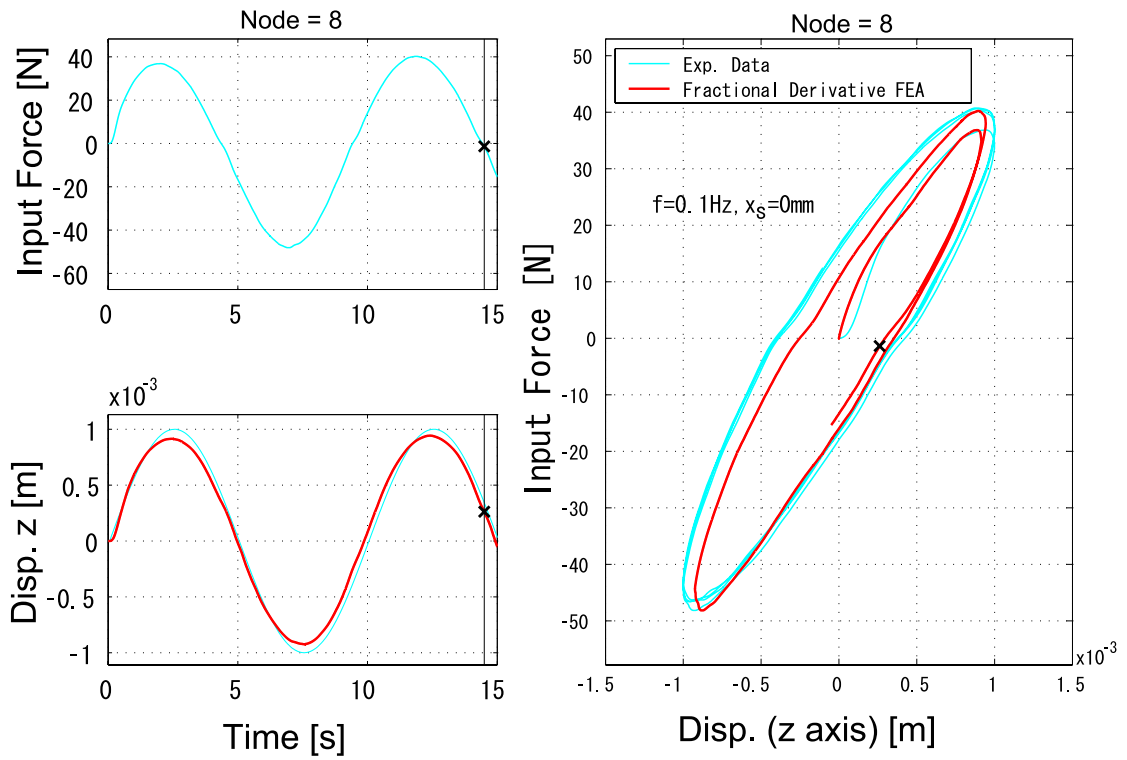


図3 動的粘弾性挙動の有限要素解析結果 (加振周波数: 0.1Hz, 加振振幅: 1mm)

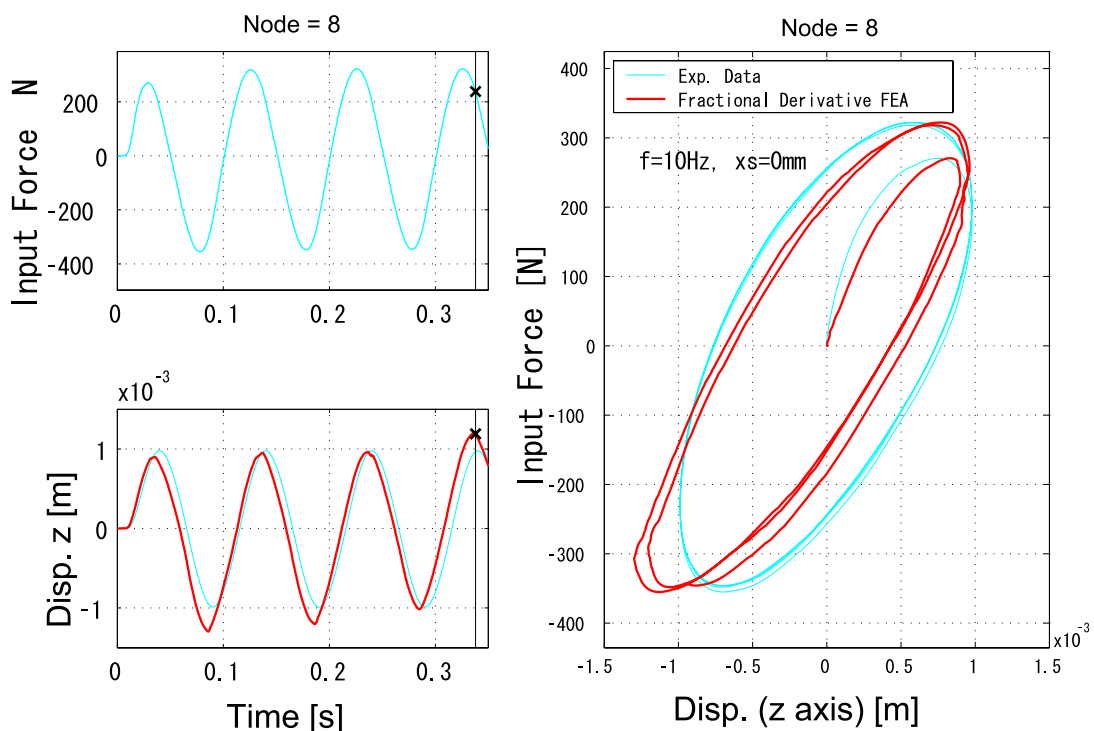


図4 動的粘弾性挙動の有限要素解析結果（加振周波数：10Hz，加振振幅：1mm）

論文の結論として、上記の検証解析により、一般化接線剛性行列や等価節点粘弾性力ベクトルは、非線形粘弾性変位 - 力挙動を解析するのに有効であることを明らかにした。今後の研究の課題としては(1)分数階微分計算の効率をさらに高める、(2)構成式のモデルパラメータ同定の精度を高める、などが挙げられる。本論文では、分数階微分構成式を非線形有限要素解析に応用することが有効であることを示したが、分数階微分計算は近年注目が集まっているマルチスケール有限要素法や粒子法などにも応用できる。したがって、分数階微分計算を使用した非線形粘弾性解析がさらに発展する可能性がある。

## 12. 論文内容の要旨

### 【論文構成】

#### 第1章 緒論

- 第1.1節 本研究の背景および概要
- 第1.2節 分数階微分を使用する理由
- 第1.3節 粘弾性防振器具の特徴と用途および種類
- 第1.4節 既存研究とその概要
- 第1.5節 研究課題と論文構成

#### 第1章参考文献

## **第2章 線形粘弾性および分数階微分計算の基礎**

- 第2.1節 はじめに
  - 第2.2節 線形粘弾性理論
  - 第2.3節 分数階微分計算の基礎
  - 第2.4節 おわりに
- 第2章参考文献

## **第3章 圧縮形粘弾性防振材の構成則と非線形粘弾性挙動**

- 第3.1節 はじめに
  - 第3.2節 アクリル系粘弾性体の動的弾性率と構成則
  - 第3.3節 予圧縮加振実験に使用した実験装置と試験体
  - 第3.4節 実験目的
  - 第3.5節 実験方法
  - 第3.6節 圧縮形粘弾性体の変形過程
  - 第3.7節 準静的粘弾性特性把握実験の結果
  - 第3.8節 非線形準静的粘弾性挙動の理論的解釈
  - 第3.9節 動的粘弾性特性把握実験の結果
  - 第3.10節 非線形動的粘弾性挙動の理論的解釈
- 第3章参考文献

## **第4章 ベキ時間による分数階微分計算アルゴリズム**

- 第4.1節 はじめに
  - 第4.2節 分数階微分数値積分法の発展の小史
  - 第4.3節 分数階微分計算用のベキ時間公式の導出
  - 第4.4節 ベキ時間公式による分数階微分計算
  - 第4.5節 ベキ時間公式による分数階微分方程式の計算コスト
  - 第4.6節 おわりに
- 第4章参考文献

## **第5章 分数階微分幾何学的非線形有限要素定式化**

- 第5.1節 はじめに
- 第5.2節 有限変形理論の小史と提案手法の位置づけ
- 第5.3節 定式化の準備
- 第5.4節 非線形有限要素定式化
- 第5.5節 数値解法
- 第5.6節 おわりに

## 第5章参考文献

## 第6章 圧縮形粘弾性防振材の非線形有限要素解析

### 第6.1節 はじめに

### 第6.2節 分数階微分非線形有限要素解析プログラム

### 第6.3節 提案手法の検証方法と適用範囲

### 第6.4節 解析入力データ

### 第6.5節 分数階微分非線形粘弾性有限要素解析

### 第6.6節 おわりに

## 第6章参考文献

## 第7章 結論および今後の展望

### 第7.1節 各章のまとめと結論

### 第7.2節 今後の課題と展望

### 【論文概要】

粘弾性は粘性と弾性の両方を併せ持った力学的性質である。全ての材料は粘弾性応答を示し、たとえ微小ひずみに対して線形弾性材料だと信じられている材料においてもある程度の粘弾性応答を生じることが精度のよい実験において観測されている。現在では、粘弾性は材料の複雑さだけでなく、自然界の自己相似性やフラクタル性から生じると考えられている。したがって、粘弾性を理解することは現実の材料挙動および自己相似的なメカニズムに関連していると考えられている物理現象を理解するために本質的に重要であるといえる。

室温付近に置かれた粘弾性材料は、非常に広い加振周波数範囲に亘って比較的大きな材料減衰を生じる。このような特性を有するため、粘弾性材料は耐震性の向上、衝撃吸収、振動絶縁などの用途に幅広く使用されている。しかし、粘弾性が現れる際のメカニズムは明確になっておらず、粘弾性の実験的および理論的な解明は現在もなお課題とされている。そのため、粘弾性を定式化あるいは解析することは難しいと考えられている。たとえば、粘弾性は常微分方程式の解によく現れる指数則に厳密には従わないことが知られており、古典的な粘弾性理論では現実の粘弾性挙動を合理的かつ精度よくモデル化することは困難である。

一方、分数階微分構成式を使用して粘弾性材料の複素弾性率の弱い周波数依存性を表した場合、少ないモデルパラメータで精度よく解析できることが分数階微分を用いた動力学解析の分野における多くの研究者の間で知られるようになってきた。さらに、分数階微分構成式を一般によく知られている線形有限要素定式化に使用することにより、材

料の線形粘弾性特性を表すための粘弾性行列を導出できることが示されている。

粘弾性行列は有限要素方程式において粘弾性力の発生のメカニズムを明確に示し、粘弾性防振システムの開発に対して非常に役立つ。しかし、粘弾性行列はこれまで非線形粘弾性問題には適用されていない。粘弾性材料はしばしば大きな変形を生じる環境で使用されるため、非線形粘弾性挙動のモデル化は非常に重要な問題である。

上記の研究背景より、粘弾性材料の幾何学的非線形性を実験的、理論的に解明することを本学位論文の目的とした。幾何学的非線形性は材料が幾何学的に変形する際に重要になり、たとえ構成式の線形性が保たれるような微小ひずみ変形下においても変位・力挙動に無視できない非線形効果を生じさせる。幾何学的非線形な粘弾性挙動は、エンジンマウントや(電子機器の)振動絶縁体などの圧縮タイプの粘弾性防振器具に生じると考えられている。本論文の目的に対し、粘弾性材料に圧縮変位を与えた状態で微小変位加振を行った場合の変位 - 力関係を測定し、その関係を表すために、分数階微分構成式を用いて非線形有限要素定式化を行った。

実験結果を基に、圧縮変位に対して二次の非線形関数によって表される係数を有する分数階微分変位 - 力モデルを導出した。さらに、計算力学的な取り扱いを行うために分数階微分構成式を用いた幾何学的非線形有限要素定式化を行った。この定式化により、線形および非線形の粘弾性行列および等価節点粘弾性力ベクトルなどを新たに導出し、これらの行列やベクトルを含む非線形 FE 方程式を効率よく解くための数値積分アルゴリズムを開発した。

線形および非線形の粘弾性行列や等価節点粘弾性力ベクトルを実験で測定した非線形粘弾性変位 - 力関係の解析にはじめて応用した。実験結果と非線形 FE 解析結果とを比較することにより、提案手法の妥当性および有効性を検証した。この検証解析には、定式化によって得られた非線形有限要素方程式を基に新たに作成した分数階微分非線形 FE 解析プログラムを使用した。最後に、非線形粘弾性解析の発展のために今後の研究で解決すべき課題をまとめ、分数階微分計算を使用した非線形粘弾性動力学問題の展望を述べている。

### 13. 口頭試問の結果の要旨

質問 1 : 準静的な圧縮解析のアニメーションでは、解析初期において粘弾性体の下部治具に近い要素から変形しているように見えるが、それはなぜか？

回答 1 : 解析の入力値である力は解析モデルの下部節点に入力しました。このとき、解析モデル下部の要素から上部の要素へと力が伝わるのに時間が掛かるために下部治具に近い要素から変形を生じております。



質問 2：解析メッシュが粗いように見える。もう少し細かな有限要素解析メッシュで解析を行った方がよかったのではないか？

回答 2：今回使用した有限要素メッシュをさらに細かくすることにより、解析モデルの変形形状や動的挙動と実験結果との一致度を上げることができます。ただし、今回は計算の効率を優先し、実験結果をうまく解析できる程度のできるだけ少ない要素数で解析を行いました。

質問 3：解析プログラムはどのような言語で開発したのか？

回答 3：FORTRAN で作成しました。

質問 4：この論文の提案手法では、数値積分法として Newmark- 法を使用しているが、これ以外の数値積分法は検討していないのか？

回答 4：予圧縮変形方向への非線形粘弾性現象はこれまで定式化そのものが行われていない現象です。そこで、数ある数値積分法の中から適した数値積分法を探すことよりも、定式化した分数階微分非線形有限要素方程式が実験結果を解析できるということをまず検証することにしました。Newmark- 法以外の数値積分法を適用することについては続く研究において検討すべき課題だと考えます。

質問 5：材料を加振すると熱が発生するが、提案手法による解析では熱による材料剛性の変化は考慮されているのか？

回答 5：提案手法では、熱の効果を考慮しておりません。そのため、今回は熱の影響がほぼ無視できると考えられる加振 1 ~ 4 サイクル目までの実験結果に対して解析を行いました。

質問 6：解析時間刻みの値はどのように決めたのか？

回答 6：有限要素解析を行う際に使用する解析時間刻みは、一般に解析対象とする現象の応答の速さと有限要素解析モデルのメッシュの細かさに応じて決定します。なお、今回の解析では、 $5 \times 10^{-3} \text{ s}$  ~  $1 \times 10^{-4} \text{ s}$  程度の値を解析に使用しました。

コメント 1：提案手法を粘弾性体の吸音解析に応用して欲しい。

コメント 2：今回使用した材料構成式はひずみエネルギー関数を使用した構成式とは異なる形である。今後は、ひずみエネルギー関数を使用したタイプの定式化も考えてはどうか。